Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы: решение *транспортной задачи* (ТЗ). Суть задачи – минимизация полной стоимости распределения (транспортировки) бензина с нефтебаз на несколько АЗС в соответствии с существующей потребностью при различном наличии топлива и стоимости доставки до определенных потребителей.

Кроме **описания хода решения**, ответом является **указание объемов бензина, перевозимого с каждой нефтебазы на каждую АЗС** и **общие затраты** на транспортировку всего объема топлива.

2.1. Основные сведения

Стандартная ТЗ определяется как *задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения*. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции. В практике логистики надо определить количество продукции (в нашем случае тонн топлива), перевозимого с отдельной нефтебазы на одну из АЗС для полного покрытия потребности в топливе (рис. 1).

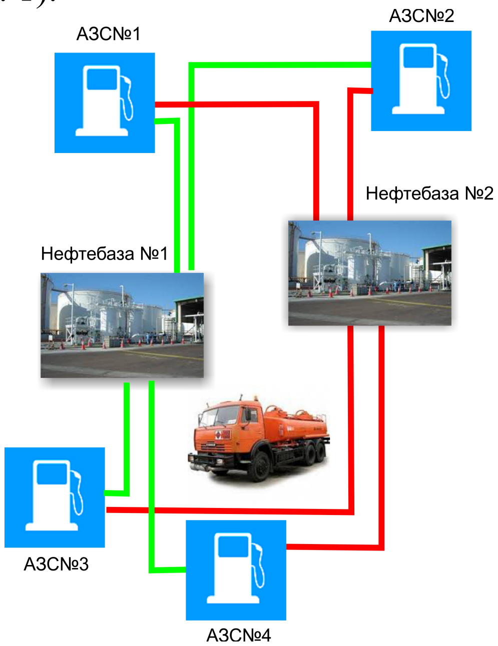

Рис. 1. *Сущность транспортной задачи – определение источника и пункта назначения товарной продукции*

Входные параметры модели ТЗ:

- n – количество пунктов отправления (нефтебаз);

- m – количество пунктов назначения (АЗС);
- a_i – запас продукции (топлива) в пункте отправления A_i $(i=\overline{1,n})$ [единиц товара, т];
- b_j – спрос на продукцию (топливо) в пункте назначения B_j $(j=\overline{1,m})$ [единиц товара, т].
- c_{ij} – транспортный тариф или стоимость перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./т], зависит от расстояния и способа транспортировки.

Выходные параметры модели ТЗ:

- x_{ij} – количество продукции, перевозимой из нефтебазы A_i на АЗС B_j [т];
- C_Σ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели транспортной задачи:

- определение переменных;
- проверка сбалансированности задачи;
- построение сбалансированной транспортной матрицы;
- задание целевой функции;
- задание ограничений.

Модель транспортной задачи задается в следующем виде:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j=\overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \ge 0\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right) \end{cases} \qquad (1)$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 1).

Таблица 1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты Отправления – нефтебазы, A_i	Пункты потребления – АЗС, B_j				Запасы, ед. прод., т
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность, ед. прод., т	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{2}$$

Если условие (2) выполняется, то ТЗ называется *сбалансированной*, в противном случае – несбалансированной. Поскольку ограничения модели (1) могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (2). В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_{ф} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{3}$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{ф} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{4}$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных реальных перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) фиктивные перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых запрещающих тарифов $c_{ij}^{з}$. Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{з} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

2.2. Пример решения транспортной задачи графическим методом

Транспортные расходы по доставке продукции представлены в таблице 2.

Таблица 2

Транспортные расходы по доставке 1 т дизельного топлива (тыс. руб.)

Нефтебазы	АЗС		
	B_1	B_2	B_3
A_1	8	5	6
A_2	4	9	7

ТЗ представляет собой задачу линейного программирования, которую можно решать симплекс-методом. Мы воспользуемся простейшим способом решения – графическим методом, чтобы показать на этом примере, как можно использовать графический метод при решении любой задачи линейного программирования в случае двух неизвестных.

Обозначим через x_{ij} количество тонн ДТ, которое будет перевезено с i-ой нефтебазы к j-му потребителю.

Проверим задачу на сбалансированность: суммарное наличие дизельного топлива на нефтебазах = 120 + 180 = 300 т; суммарная потребность в топливе на АЗС = 70 + 140 + 90 = 300 т. Из этого следует, что данная ТЗ сбалансирована.

Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 3.

Таблица 3

Транспортная матрица задачи

Нефтебазы	АЗС			Запас, т
	B_1	B_2	B_3	

A_1	8	5	6	120
A_2	4	9	7	180
Потребность, т	70	140	90	300

Целевая функция, то есть суммарные затраты на все возможные перевозки продукции, учитываемые в модели, задается следующим выражением:

$$C_{\blacklozenge} = 8x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 7x_{23} \to \min. \tag{5}$$

Зададим ограничения ТЗ:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180 \\ x_{11} + x_{21} = 70 \\ x_{12} + x_{22} = 140 \\ x_{13} + x_{23} = 90 \\ x_{ij} \geq 0 \left(\forall \mathrm{i} = \overline{1,2}; \forall \mathrm{j} = \overline{1,3}\right) \end{cases} \tag{6}$$

Положим, что $x_{11} = u$, $x_{12} = v$. Тогда можно выразить все остальные неизвестные через переменные u и v:

$$x_{13} = 120 - u - v;$$
$$x_{21} = 70 - u;$$
$$x_{22} = 140 - v;$$
$$x_{23} = 90 - x_{13} = 90 - (120 - u - v) = u + v - 30.$$

Выразим через u и v целевую функцию:

$$F = 8u + 5v + 6(120 - u - v) + 4(70 - u) + 9(140 - v) + 7(u + v - 30).$$
$$F = 5u - 3v + 2050 \to \min. \tag{7}$$

Учитывая, что все x_{ij} неотрицательные, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 120 - u - v \geq 0 \\ 70 - u \geq 0 \\ 140 - v \geq 0 \\ u + v - 30 \geq 0 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Для того чтобы найти в первой четверти плоскости Ouv множество точек, координаты которых удовлетворяют указанным выше неравенствам, необходимо сначала построить следующие прямые:

$$120 - u - v = 0,$$
$$70 - u = 0,$$
$$140 - v = 0,$$
$$u + v - 30 = 0.$$

Неравенства (8) определяют на плоскости (v, u) пятиугольник с вершинами: (0, 30), (0, 70), (50, 70), (120, 0), (30, 0) (рис. 2). Линейная функция $F = f(u, v)$ достигает наименьшего значения в одной из вершин этого пятиугольника.

Нетрудно убедиться в том, что $F = F_{min} = 1690$ при $u = 0$, $v = 120$.

Следовательно, мы нашли оптимальный план перевозок в тоннах:

$$x_{11} = 0,$$
$$x_{12} = 120,$$
$$x_{13} = 0,$$
$$x_{21} = 70,$$
$$x_{22} = 20,$$
$$x_{23} = 90.$$

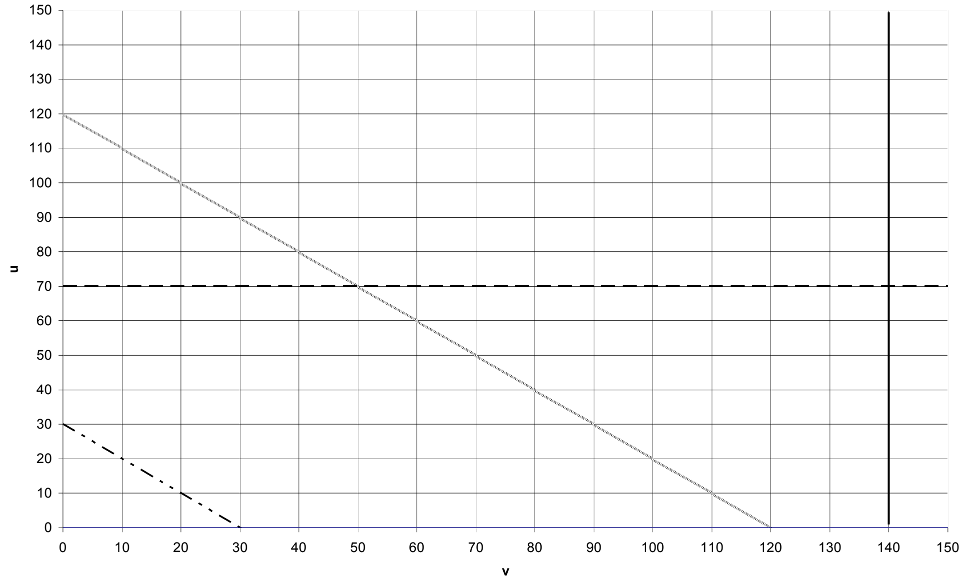

Рис. 2. *Графический метод решения транспортной задачи*

2.3 Методика решения задач оптимизации в среде Matlab

Для решения задач линейного программирования в Matlab предназначена функция *linprog* следующей структуры:

[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);

Здесь f – массив (вектор-столбец) коэффициентов при неизвестных функции цели, длина вектора n совпадает с количеством неизвестных x.

A – матрица коэффициентов из левой части системы ограничений, количество строк матрицы равно количеству ограничений m, а количество столбцов совпадает с количеством неизвестных коэффициентов n;

b – массив (вектор-столбец), содержит свободные члены системы ограничений, длина вектора m;

Aeq – вектор длины n для множителей ограничительного уравнения;

beq – правая часть ограничительного уравнения, длина 1;

lb – (“lower bounds” нижняя граница) нижняя граница значений неизвестных коэффициентов.

В случае, если какой-либо параметр не передается *linprog*, он задается как пустая матрица [].

Функция *linprog* возвращает массив неизвестных x и значение целевой функции.

Рассмотрим использование функции *linprog* на примере решения следующей задачи линейного программирования.

Пример.

Намечается выпуск двух видов костюмов — мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерстяной ткани, 2 м лавсана и 1 день трудозатрат. На мужской костюм — 3,5 м шерстяной ткани, 0,5 м лавсана и 1 день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерстяной ткани, 240 м лавсана и 150 дней трудозатрат. По плану предусматривается выпуск не менее 110 костюмов, причем необходимо обеспечить прибыль не менее 1400 рублей. Требуется определить оптимальное число костюмов каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 руб., а от реализации мужского — 20 руб.

Постановка условий и решение.

Пусть x_1 — число женских костюмов, x_2 — число мужских костюмов. Прибыль от реализации женских костюмов составляет $10*x_1$ руб., от реализации мужских костюмов $20*x_2$ руб., то есть необходимо максимизировать целевую функцию

$f(x)=10*x_1+20*x_2$

Расход шерсти составляет $1*x_1+3,5*x_2$, лавсана $2*x_1+0,5*x_2$, трудовых ресурсов x_1+x_2. Поэтому ограничения задачи имеют вид

1) $x_1 \quad +3,5*x_2 \quad \le 350$
2) $2*x_1 \quad +0,5*x_2 \quad \le 240$
3) $x_1 \quad +x_2 \quad \le 150$
4) $x_1 \quad +x_2 \quad \ge 110$
5) $10*x_1+20*x_2 \quad \ge 1400$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

Первые три неравенства описывают ограничения по ресурсам, четвертое и пятое – соответственно плановое задание по общему числу костюмов и ограничение по прибыли.

Код Matlab для решения приведенной задачи:

Для **максимизации** задачи, т.е. наиболее полного использования трудовых и сырьевых ресурсов, необходимо взять f(x) со знаком «–», т.е. –f(x). **Для ее минимизации, т.е. определения количества костюмов, необходимого сделать наоборот (с +).**

```
%we declare coefficients of objective function,
%variables in cases A, constrains for each cases b
f = [-10 -20];
A = [1 3.5
    2 0.5
    1 1
    -1 -1
    -10 -20];
b = [350 240 150 -110 -1400];

%now we call linear programming function
x = linprog(f,A,b); %Xij
f=f(1)*x(1)+f(2)*x(2); %f=f1*x1+f2*x2
%output of optimization results
disp('Values of Xij:');
disp(x);
disp('Objective function:');
disp(f);
```

Выполнив вышеуказанный код, получим:

x =

70

80

f =

-2300

Т.к. f = -f(x), то f(x)=2300.

Этот вывод следует интерпретировать следующим образом: для максимизации прибыли при имеющихся ресурсах следует выпустить 70 мужских и 80 женских костюмов.

Внимание! Матрица А должна содержать по строкам число элементов x_{ij} . Однако, т.к. число строк транспортной матрицы не равно числу столбцов уравнения, множители x_{ij} в них будут представлены не все. В этом случае, необходимо заменить отсутствующие множители на “0”.

Рекомендация

Следует учитывать, что транспортная задача – формальна и для ее успешного решения может потребоваться задание дополнительных параметров вызова функции *linprog*.

В частности, поскольку наша задача *сбалансирована,* надо задать количество поступившей на склад продукции, соответствующей требованиям потребителей. Это удобно сделать с помощью входных параметров Aeq и beq.

Например:

```
%общий запас груза, который можно доставить с 2 баз на 2
%АЗС (матрица 2x2)
Aeq = [1 1 1 1];
beq = 300;
```

Кроме того, необходимо указать минимальное количество топлива, получаемого с нефтебазы – параметр *lb*. Вероятнее всего, это будет 0, когда топливо брать с нефтебазы для той или иной АЗС вообще невыгодно.

Например для транспортной матрицы из 2 источников и двух потребителей:

```
% (матрица 2x2)
lb = [0 0; 0 0];
```

Самостоятельно

Разобрав пример решения задачи оптимизации, приведенный выше, использовать полученный опыт для решения задачи лабораторной работы.

Перед выполнением практической работы и отражения ее результатов в отчете, прорешать в Matlab *вариант разобранный в примере решения транспортной задачи графическим способом.* При совпадении решения приступить к своему варианту транспортной задачи.

Для дополнительной практики и улучшения понимания рекомендуется использовать практические упражнения из книги [1].

Функция Matlab linprog подробно разобрана на сайте [2].

Требования к отчету

Отчет о выполнении лабораторной работы должен содержать:

— тему и цель лабораторной работы на титульной странице;

— оглавление;

— необходимые теоретические сведения по теме;

— исходные данные и последовательность их обработки (преобразования);

— поэтапный расчет в виде вставок кода Matlab в объектах «Подпись»;

— результаты выполнения кода Matlab в виде вывода в командном окне;

— интерпретацию результатов расчета объемов ДТ, поставляемых с i нефтебазы на j АЗС, x_{ij} в т;

— отметку преподавателя о выполнении лабораторной работы.

Рекомендуемая литература

1. Алексеев Е.Р. Введение в Octave для инженеров и математиков: / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова — М.: ALT Linux, 2012. — 368 с. URL: https://www.altlinux.org/images/0/07/OctaveBook.pdf
2. Задача линейного программирования на сайте Exponenta.ru URL: http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_4/6/linprog.php

Приложение А

Варианты исходных данных для решения транспортной задачи

a_1, a_2 – наличие ДТ на первой и второй нефтебазах, т; *b_1, b_2, b_3* – потребность 1-й, 2-й и 3-й АЗС в топливе, т; c_{ij} – стоимость доставки топлива с i склада на j АЗС.

Вариант	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}
1	108	162	81	135	54	6	3	4	6	10	8
2	160	240	120	200	80	5	6	7	7	4	8
3	132	198	99	165	66	4	7	6	4	7	10
4	120	180	90	150	60	9	4	5	5	4	5
5	104	156	78	130	52	6	4	5	10	9	10
6	128	192	96	160	64	9	8	6	7	6	6
7	132	198	99	165	66	8	3	8	9	5	7
8	120	180	90	150	60	3	3	8	5	10	10
9	120	180	90	150	60	7	9	8	8	4	4
10	148	222	111	185	74	3	5	4	5	10	7
11	112	168	84	140	56	9	6	8	7	4	9
12	116	174	87	145	58	3	3	3	8	5	10
13	128	192	96	160	64	8	8	5	8	8	4
14	116	174	87	145	58	9	8	6	10	4	7
15	124	186	93	155	62	6	5	7	10	4	7
16	140	210	105	175	70	4	5	7	4	10	8
17	108	162	81	135	54	4	9	4	5	5	4
18	124	186	93	155	62	7	3	8	9	7	8
19	128	192	96	160	64	4	3	8	4	8	4
20	104	156	78	130	52	5	6	7	6	8	7
21	148	222	111	185	74	3	9	6	7	8	6
22	108	162	81	135	54	6	9	9	7	5	4
23	112	168	84	140	56	9	5	3	7	8	4
24	112	168	84	140	56	4	4	8	7	9	6
25	156	234	117	195	78	7	8	8	5	9	5
26	100	150	75	125	50	8	4	6	4	4	7
27	120	180	90	150	60	8	8	7	9	10	6
28	148	222	111	185	74	4	3	5	6	8	7
29	116	174	87	145	58	3	4	4	9	5	9
30	100	150	75	125	50	8	9	3	9	8	10
31	140	210	105	175	70	5	5	3	6	4	4
32	128	192	96	160	64	9	5	5	8	5	9
33	140	210	105	175	70	8	6	4	8	10	9
34	112	168	84	140	56	5	4	8	9	4	4
35	120	180	90	150	60	4	6	9	7	8	8
36	112	168	84	140	56	3	9	6	8	8	8
37	148	222	111	185	74	8	7	7	6	7	7
38	144	216	108	180	72	9	3	7	10	7	6

39	104	156	78	130	52	3	9	9	5	5	10
40	148	222	111	185	74	8	6	8	8	7	8
41	144	216	108	180	72	7	6	4	4	7	9
42	112	168	84	140	56	3	8	9	7	8	10
43	124	186	93	155	62	9	3	8	5	9	6
44	124	186	93	155	62	6	7	4	5	10	6
45	148	222	111	185	74	6	8	7	7	4	5
46	128	192	96	160	64	9	6	7	9	8	4
47	128	192	96	160	64	7	4	8	10	10	8
48	116	174	87	145	58	6	9	3	6	4	10
49	108	162	81	135	54	5	4	7	4	10	10
50	120	180	90	150	60	3	3	7	7	9	9
51	144	216	108	180	72	9	4	5	4	6	5
52	152	228	114	190	76	7	3	3	5	8	4
53	140	210	105	175	70	6	7	8	10	4	7
54	144	216	108	180	72	9	7	6	9	6	6
55	112	168	84	140	56	4	6	5	4	6	6
56	144	216	108	180	72	5	8	9	8	6	6
57	120	180	90	150	60	4	8	7	6	4	9
58	152	228	114	190	76	4	3	6	8	4	6
59	152	228	114	190	76	6	3	7	10	10	7
60	112	168	84	140	56	7	6	7	7	8	9
61	144	216	108	180	72	5	4	6	6	4	7
62	136	204	102	170	68	9	7	4	6	10	6
63	160	240	120	200	80	7	4	3	6	7	7
64	112	168	84	140	56	4	4	6	6	7	7
65	140	210	105	175	70	8	7	6	7	10	4
66	128	192	96	160	64	8	4	7	7	9	4
67	156	234	117	195	78	5	4	5	5	10	9
68	152	228	114	190	76	4	3	4	8	6	5
69	128	192	96	160	64	3	5	8	5	4	6
70	144	216	108	180	72	9	6	8	9	5	9
71	156	234	117	195	78	8	7	8	9	10	6
72	120	180	90	150	60	5	8	3	7	7	7
73	156	234	117	195	78	7	9	4	7	4	10
74	108	162	81	135	54	5	6	9	6	8	6
75	152	228	114	190	76	5	4	8	9	4	6
76	156	234	117	195	78	5	5	6	9	4	10
77	136	204	102	170	68	8	4	4	7	4	4
78	108	162	81	135	54	4	8	4	4	10	10
79	160	240	120	200	80	8	8	8	4	6	5
80	160	240	120	200	80	4	7	3	10	10	9
81	104	156	78	130	52	8	6	8	4	7	4
82	144	216	108	180	72	8	6	8	7	7	5
83	124	186	93	155	62	3	3	3	10	9	5
84	104	156	78	130	52	9	5	9	5	10	8
85	160	240	120	200	80	6	9	4	8	4	9

86	152	228	114	190	76	7	6	6	10	6	7
87	156	234	117	195	78	6	8	3	10	10	5
88	132	198	99	165	66	6	5	4	6	6	7
89	116	174	87	145	58	3	9	8	8	9	6
90	148	222	111	185	74	6	4	8	4	7	4
91	136	204	102	170	68	8	3	9	5	4	5
92	144	216	108	180	72	5	3	5	7	5	7
93	132	198	99	165	66	7	4	9	5	10	8
94	104	156	78	130	52	6	6	9	4	10	6
95	144	216	108	180	72	6	7	5	7	5	6
96	112	168	84	140	56	7	7	9	9	9	4
97	152	228	114	190	76	8	5	7	8	9	10
98	132	198	99	165	66	8	3	7	8	8	4
99	140	210	105	175	70	8	5	9	9	8	7
100	148	222	111	185	74	9	5	3	7	4	8