Лабораторная работа № 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Цель работы: ознакомление с применением обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в решении элементарных задач математического моделирования, а также способами решения ОДУ (задач Коши и краевых задач) в программах научного программирования (на примере Matlab).

Задание: Разобрать примеры 1–2, выполнить задачи 1 и 2 с учетом вариантов. По результатам выполнения задачи представить научный отчет.

3.1. Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях

Математическое моделирование служит для постановки и решения задач реального мира в математических терминах (рис. 3.1).

Рис. 3.1. *Схематический процесс математического моделирования*

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной x, неизвестной функции y = f(x) и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Порядком уравнения называется максимальный порядок n входящей в него производной (или дифференциала).

Решением (интегралом) дифференциального уравнения порядка n называется функция y(x), имеющая на некотором интервале (a, b) производные до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием

Все дифференциальные уравнения можно разделить на *обыкновенные* (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и *уравнения с частными производными* (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных.

3.2. Геометрический смысл уравнения первого порядка. Уравнение $y' = f(x, y)$ или $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ в каждой точке (x, y) области D, в которой задана функция f(x, y), определяет - угловой коэффициент касательной к решению, проходящему через точку (x, y), т.е. направление, в котором проходит решение через эту точку (рис. 3.2).

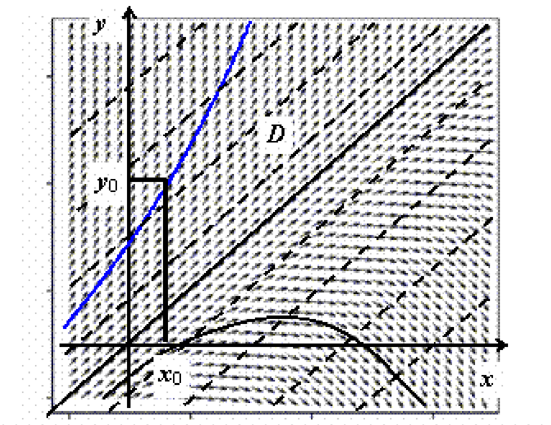

Рис. 3.2. *Поле решений и общие решения ОДУ y'=y-x+1*

Говорят, что уравнение $y' = f(x, y)$ задаёт в D поле направлений. График любого решения дифференциального уравнения (называемый также интегральной кривой) в любой своей точке касается этого поля, т.е. проходит в направлении, определяемом полем.

Интегрирование дифференциального уравнения геометрически означает нахождение кривых, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением поля. На рисунке справа изображено поле направлений, определяемое уравнением , и три *интегральные кривые (три частных решения)* этого уравнения. Решение можно провести через любую точку области D; *единственное решение* можно выделить, если задать точку, через которую проходит интегральная кривая (подсвечено синим на рис. 3.1):

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

3.3. Приложения к математическому моделированию и информатике. Иногда для моделирования производственных процессов в нефтегазовой отрасли промышленности интересны не столько *функция* *f(x)*, сколько *скорость* *f'(x)* и *ускорение* *f''(x)* ее изменения. В некоторых случаях только скорость и ускорение бывают известны. В этом случае требуется найти функцию (интеграл).

Пример №1. Постановка модели и решение простейшей задачи. *Для рекультивации нефтезагрязненных почв зачастую используются живые организмы, штамм которых вносится в грунт. По условию задачи, колония живых организмов, разлагающих углеводороды, находится в благоприятных условиях, благодаря чему прирост $\alpha > 0$ (рождаемость γ выше, чем смертность σ, $\alpha = \gamma - \sigma$; $\alpha > 0$). Для упрощения, пространство, занимаемое колонией, и ее пищевые ресурсы (т.е. пропитывающие почву углеводороды) будем считать неограниченными. Предположим также, что естественных врагов, питающихся организмами данной колонии, нет. Найти закон изменения численности организмов в зависимости от времени, если при t = 0 их число равнялось y_0 .*

Решение: *будем считать, что скорость изменения численности организмов пропорциональна этой численности и* α - *коэффициент пропорциональности (рождаемость* γ *выше, чем смертность* σ, $\alpha = \gamma - \sigma$; $\alpha > 0$*):*

$V = \alpha \cdot y$.

Так как $V = y'$*, то численность y организмов в колонии в момент времени t удовлетворяет уравнению:* $y' = \alpha \cdot y$.

Отсюда $\frac{dy}{dt} = \alpha\, y$ **(1)**.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y} = \alpha dt$ *. Начальное условие: при t=0 численность особей* $x = x_0$*.*

Интегрируя, получим общее решение:

$$\int_{x0}^{x} \frac{dy}{y} = \int_{0}^{t} \alpha\, dt$$

$$\ln y - \ln y_0 = \ln \frac{y}{y_0} = \alpha t$$

$$y = y_0 \cdot e^{\alpha t}$$

Значит, число организмов в колонии изменяется по законам

$$y = y_0 \cdot e^{\alpha t}.$$

Ответ: число организмов в колонии изменяется по законам $y = y_0 \cdot e^{\alpha t}$.

<u>Производные и интегралы в Matlab:</u>

Нахождение интеграла в Matlab осуществляется с помощью функции int():

int(expr,var,a,b);

Здесь: expr – выражение, var – переменные выражения, a и b – нижние и верхние интервалы интегрирования.

Рассмотрим пример решения интеграла выше:

$$\int \alpha\, dt = at$$

```
syms x alpha %define x as symbolic variables
int(alpha,x);
%команда выше выведет
ans=alpha*x
```

Дифференцирование в Matlab:

$$f'(x) = \sin(5x)$$

```
%define x as symbolic variables
syms x
fdot = sin(5*x);
diff(f)
%команда выше выведет

ans =
5*cos(5*x)
```

3.4. Решение ОДУ в Matlab.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений в Matlab применяется функция *ode45()*. С помощью этой функции можно граничные задачи.

Синтаксис команды: [T y]=*ode45*(ydot,t,y0), здесь: y – вектор (массив-строка) решений дифференциального уравнения, y0 – начальное значение функции y(t), t0 – начальное значение аргумента, t – вектор значений времени работы модели, ydot – производная исследуемой функции, T – соответствующее y значение функции.

Выполним постановку, табличное и графическое решение задачи о численности популяции (Пример №1) в Matlab для определенного коэффициента прироста популяции $\alpha = 0.3$ и на множестве $t = \overline{0,10}$ (т.е. с момента времени 0 до 10).

Код Matlab для примера 1:

```
clear;
y0=3;
t0=0;
alpha=0.3;
t=0:0.1:10;

ydot= @(t, y) alpha*y; %derivative function

[T y]=ode45(ydot,t,y0);
plot(T, y);
```

Как видно из примера выше, там объявляется функция с помощью оператора @ . Это так называемый “анонимный” способ объявления функции. Он альтернативен принятому в Matlab объявлению функции с помощью ключевого параметра *function*.

```
function ydot(y, t)
    global alpha;
    ydot=alpha*y;
```

Эту функцию необходимо объявить в отдельном файле *ydot.m*. Ключевое слово *global* применяется для указания переменной alpha, объявленной в командном окне.

Пример №2. Решение простой задачи теоретической механики. *Для планирования* *действий по ликвидации последствий возможных чрезвычайных ситуаций (ЧС) на нефтегазовых предприятиях иногда важно знать не только направление, но и скорость движения ветра, к оторая изменчива и зависит от внешних условий.*

Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале этого пути и его длине. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу ***150 м****, зная, что до вступления в лес начальная скорость ветра* $V_0 = 12 м/с$*; после прохождения пути* ***S=1м****, скорость ветра* ***уменьшилась*** *до величины* $V_1 = 11{,}8 м/с$.

Решение: *Пусть на расстоянии S от начала леса скорость ветра равна V, потеря скорости на пути dS равна –dV (****процесс убывающий****). Эта потеря пропорциональна V , и поэтому дифференциальное уравнение процесса примет вид:* $-\dfrac{dV}{dS} = kV$.

Разделяем переменные:

$$\frac{dV}{V} = -k \cdot dS.$$

Интегрируя, получим общее решение задачи:

$$V = c \cdot e^{-ks} \quad \textbf{(1)}.$$

Найдем частное решение, используя начальное условие: при S=0; $V = V_0$*. Подставим это условие в уравнение* ***(1)****:* $V_0 = c \cdot e^0 \Rightarrow c = V_0$.

Закон процесса:

$$V = V_0 \cdot e^{-kS} \quad \textbf{(2)}.$$

Для определения коэффициента пропорциональности k используем дополнительное условие: при S=1м, $V = V_1 = 11{,}8 м/с$.

Откуда: $V_1 = V_0 \cdot e^{-k}$*, или* $e^{-k} = \dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{11{,}8}{12} = 0{,}98$.

Подставляя числовые значение в уравнение ***(2)****, получим искомую скорость:* $V = 12 \cdot (0{,}983)^{150} = 12 \cdot 0{,}0776 \approx 0{,}92 \ м/с$.

Итак, скорость ветра, углубившегося на 150м в лес, составит 0,93м/с.

<u>*Ответ:*</u> $V(150) = 0{,}92 \ м/с$.

Для использования программы *ode45() Matlab* необходимо найти коэффициент пропорциональности *k*. В коде ниже показано его вычисление.

Код Matlab для решения примера 2:

```
clear; %memory clean up
V0=12;
k=-log(11.8/12);
%k=0.016;
t=0:1:150;

Vdot= @(S, V) -k*V; %derivative function

[T V]=ode45(Vdot,t,V0);
plot(T, V);
ylabel('V(S),[m/s]');
xlabel('S,[m]');
title('Changes of wind speed per distance V(S)');
disp ('Wind speed after 150 m = ');
disp (V(150));
```

Вызов программы в *Matlab* возвращает графическое решение уравнения (рис. 3.3) и результат в командной строке.

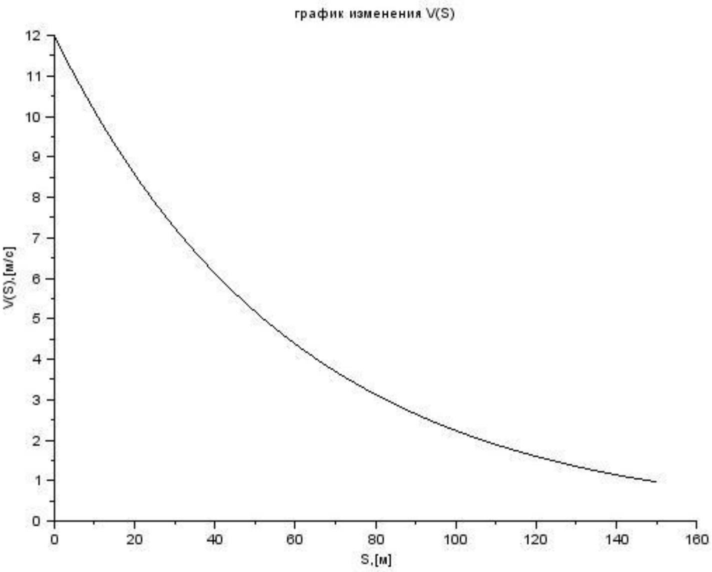

Рис. 3.3. *График изменения скорости ветра V(S) по мере его продвижения в лесу на расстояние S*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Разрядка аккумуляторной батареи. Требуется сформулировать задачу разрядки батареи, питающий лампу. Электрическая схема цепи состоит из источника постоянного тока с напряжением U, выключателя и лампы.

Чем дольше горит лампа, тем меньшее напряжение должна вырабатывать батарейка модели и тем слабее должна светить лампочка. В этом и состоит динамика модели: напряжение и связанная с ним яркость свечения лампы зависят от времени.

Рис. 3.4. *Электрическая схема цепи и электролампы*

Уменьшение напряжения батарейки со временем опишем уравнением:

$$U_Б(t) = U_0 \cdot e^{-t/T} = U_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

, где: $U_Б(t)$ – зависимость напряжения батарейки от общего времени ее работы; U_0 – напряжение, создаваемое новой батарейкой;

t – общее время работы батарейки в фонарике;

T - срок службы батарейки, работающей в фонарике. Это характерное время, в течение которого батарейка разрядится почти на две трети, точнее, ее напряжение составит 37% от начального. У многих батареек для фонариков время T составляет 2–3 часа.

Программа, моделирующая фонарик, должна учитывать время работы батарейки и уменьшать ее напряжение в соответствии с формулой выше. Отметим, что при решении этой задачи мы пренебрежем сопротивлением проводов, поэтому напряжение на лампочке будет равно напряжению батарейки.

Для решения задачи нам потребуется представить уравнение разряда батарейки в дифференциальном виде:

$$\frac{dU}{U} = -\alpha \cdot dt$$

Вариант задачи (Приложение А) содержит: U0; Un – напряжение через время n; n – время работы до уменьшения напряжения до Un;

Требуется:

а) Найдите численное решение уравнения этой задачи, задав характеристики аккумуляторной батареи (см. вариант задачи, Приложение А). Как найти коэффициент пропорциональности α ?

б) По аналогии с предыдущими упражнениями, пожалуйста, составьте код Matlab. Когда разрядится аккумулятор?

в) Постройте, пожалуйста, график изменения напряжения U(t) в Matlab для вставки в отчет.

Задача 2. Зарядка электроконденсатора. Электрический конденсатор изначально не заряжен. Процесс зарядки электрического конденсатора в цепи (рис. 3.5), к которому в момент времени 1 = 0 приложено напряжение U, описывается ОДУ первого порядка

$$R\frac{dQ}{dt} = V - \frac{Q}{C}$$

с начальным условием Q(0)=0.

Требуется:

а) Найдите численное решение уравнения этой задачи, задав следующие характеристики цепи сопротивление R, емкость C, напряжение V (см. вариант задачи, Приложение Б)

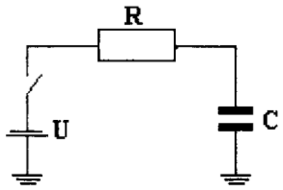

Рис. 3.5. *Схема зарядки конденсатора.*

б) Ответьте, пожалуйста, на вопросы. Как зависит заряд конденсатора от времени. Заряжается ли он бесконечно, или в какой-то момент времени происходит его насыщение?

в) Постройте, пожалуйста, график зарядки конденсатора для вставки в отчет.

Указание. Для увеличения точности решения можно брать время с меньшим шагом. Рекомендуемый шаг времени t наблюдений 0.0001 с, диапазон наблюдений $t = \overline{0{,}0.05}$ с.

Рекомендация. Для проверки незначительности увеличения заряда конденсатора с дальнейшим течением времени можно использовать код, аналогичный приведенному ниже:

Код Matlab для обхода вектора значений заряда Q в момент времени t и проверки малости отличий между Q(i) и Q(i-1):

```
//проверка малости изменений прибл. значений
вектора Q
for i=2:length(Q)
   i_min=i-1;
if Q(i)-Q(i_min)<1e-9
   disp('Конденсатор заряжен в момент времени t~');
   disp(t(i));
   disp ('Заряд конденсатора достиг Q = ');
   disp (Q(i));
   break;
   end;
end
```

Требования к отчету

Отчет о выполнении лабораторной работы должен содержать:

- тему и цель лабораторной работы на титульной странице;

- оглавление;
- необходимые теоретические сведения по теме решаемых задач;
- исходные данные и последовательность их обработки (преобразования);
- поэтапный расчет в виде вставок кода Matlab в объектах «Подпись»;
- результаты выполнения кода Matlab в виде вывода в командном окне;
- графики, выполненные в Matlab;
- интерпретацию результатов работы моделей;
- отметку преподавателя о выполнении лабораторной работы.

Рекомендуемая литература

1. Алексеев Е.Р. Matlab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В.Чеснокова, Е. А.Рудченко // М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 260 с.
2. Павлова М.И. Руководство по работе с пакетом Matlab 2.6. 2003. 200 с.
3. Поршнев С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB / М.:, 2003. 593 с.
4. Эдвардс Ч., Пенни Д. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью *Mathematica, Mapple и Matlab* / М.: 2008, 1104 с.

Приложение А

Варианты исходных данных для решения самостоятельной задачи №1

Вариант	U_0, V	U_n,V	n, мин
1	19	17	8
2	20	18	5
3	21	19	5
4	22	20	8
5	16	14	8
6	16	14	7
7	20	18	7
8	19	17	8
9	18	16	8
10	21	19	5
11	17	15	11
12	19	17	7
13	21	19	12
14	17	15	9
15	16	14	8
16	19	17	10
17	22	20	7
18	16	14	12
19	17	15	10
20	17	15	6
21	20	18	6
22	20	18	12
23	16	14	9
24	16	14	12
25	16	14	12
26	16	14	8
27	20	18	8
28	16	14	12
29	16	14	9
30	15	14	7
31	20	18	11
32	20	18	5
33	17	15	12
34	16	14	7
35	22	20	10
36	21	19	9
37	16	14	12
38	17	15	12
39	18	16	8
40	18	16	6
41	16	14	7
42	15	14	7
43	21	19	8
44	15	14	6
45	22	20	9
46	20	18	9
47	17	15	12
48	15	14	11
49	18	16	6
50	18	16	10

Варианты исходных данных для решения самостоятельной задачи №2

Вариант	R, Ом	C, 10^{-n} Ф	V, В
1	2300	4	5
2	2400	4	5
3	1900	5	10
4	2400	4	11
5	1600	5	7
6	2100	5	5
7	1500	5	7
8	2400	5	8
9	1700	5	8
10	1700	5	7
11	2000	5	6
12	1800	6	9
13	1700	4	6
14	1500	5	8
15	2500	6	9
16	1800	5	10
17	1800	6	12
18	2000	4	12
19	1500	5	12
20	2200	4	5
21	2200	4	6
22	1500	5	5
23	2500	5	9
24	2400	4	11
25	2300	4	8
26	2300	4	6
27	2100	4	10
28	2300	5	10
29	2500	6	12
30	2300	4	8
31	2000	4	12
32	1500	6	5
33	2300	5	9
34	2500	4	6
35	2200	6	5
36	1800	6	10
37	2400	5	8
38	1900	4	5
39	1500	4	12
40	1800	5	6
41	2400	6	5
42	2000	6	6
43	2300	5	5
44	1600	4	11
45	1900	5	11
46	2500	5	9
47	1800	6	5
48	2100	5	7
49	2200	4	7
50	2200	6	9